Раздел 2. Тема 5. Занятие 4.

1^0 Если S – кусочно гладкая поверхность, ограничивающая объем V, и $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ – функции, непрерывные вместе с частными производными первого порядка в области $V \cup S$, то справедлива формула Остроградского:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

2^0. Объем тела, ограниченного поверхностью S, равен

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Класс: №№ 4376, 4378, 4385, 4387, 4389

№4376 Преобразовать интеграл I, если гладкая поверхность S ограничивает объем V и $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S:

$$I=\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=\iint_S\left(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma\right)dS=$$

$$=3\iiint_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz.$$

№4378 Преобразовать интеграл I, если гладкая поверхность S ограничивает объем V и $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S:

$$I=\iint_S\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=2\iiint_V\frac{x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}dxdydz=$$

$$=2\iiint_V\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

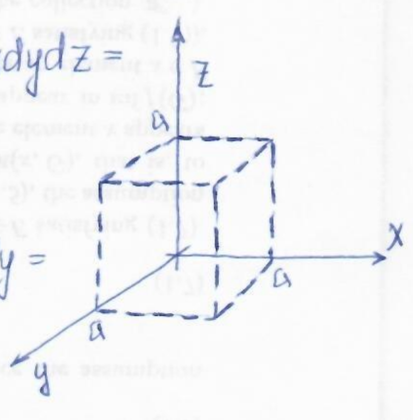
$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\qquad\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{x^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\qquad\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

№4387 Найти $I=\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iint_S\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS=$

$$=\iiint_V(2x+2y+2z)dxdydz=2\iiint_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a\\0\le z\le a}}(x+y+z)dxdydz=$$

$$=2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a(x+y+z)dz=a\int_0^a dx\int_0^a(2x+2y+a)dy=$$

$$=2a^2\int_0^a(x+a)dx=3a^4.$$



Здесь S — внешняя сторона границы куба $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$.

№4389 Найти $I=\iint_S(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$, где S — внешняя сторона поверхности $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$.

$$I=\iint_S\left\{(x-y+z)\cos\alpha+(y-z+x)\cos\beta+(z-x+y)\cos\gamma\right\}dS=$$

$$= 3\iiint_V dxdydz. = (*)$$

$$\exists \left.\begin{aligned} u &= x-y+z \\ v &= y-z+x \\ w &= z-x+y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ где } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \det P = 4 \Rightarrow$$

$$|I| = |\det P^{-1}| = \frac{1}{4} \Rightarrow (*) = \frac{3}{4}\iiint_{V'} dudvdw = 8\cdot\frac{3}{4}\int_0^1 dw\int_0^{1-w} dv\int_0^{1-w-v} du =$$

$$= \frac{6}{2}\int_0^1 (1-w)^2 dw = \frac{2}{2} = 1.$$

Здесь V' — фигура, ограниченная поверхностью $|u|+|v|+|w| = 1$.

N4385 Найти объем тела, ограниченного поверхностью

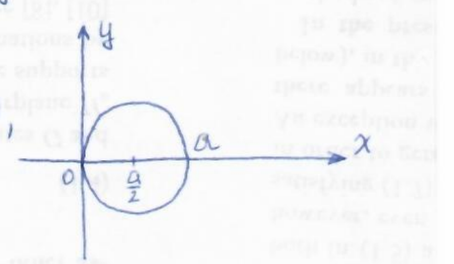
$x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = -u + a\cos v$, $u \geq 0$

и плоскостями $x=0$, $z=0$, $a>0$.

Пусть $z = 0 \Rightarrow u = a\cos v \Rightarrow \begin{cases} x = a\cos^2 v \\ y = a\cos v\sin v \end{cases}$

$$x^2+y^2 = a^2\cos^4 v + a^2\cos^2 v\sin^2 v = a^2\cos^2 v = ax \Rightarrow x^2+y^2 = ax. \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$



Поскольку тело ограничено плоскостями $x=0$, $z=0$,

то $z \geq 0 \Rightarrow 0 \leq u \leq a\cos v$.

$$A = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ -1 & -a\sin v \end{vmatrix} = -a\sin^2 v + u\cos v$$

$$B = \begin{vmatrix} -1 & -a\sin v \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = u\sin v + a\sin v\cos v$$

$$C = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u\cos^2 v + u\sin^2 v = u \geq 0$$

$$A^2+B^2+C^2 = 2u^2 + a^2\sin^2 v$$

$$\cos\alpha = \frac{-a\sin^2 v + u\cos v}{\sqrt{2u^2+a^2\sin^2 v}}; \quad \cos\beta = \frac{u\sin v + a\sin v\cos v}{\sqrt{2u^2+a^2\sin^2 v}}; \quad \cos\gamma = \frac{u}{\sqrt{2u^2+a^2\sin^2 v}}$$

$\cos\gamma \geq 0$ поскольку тело ограничено плоскостями $x=0,\ z=0$.

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v + 1 = 2$$

$$G = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + a^2\sin^2 v = u^2 + a^2\sin^2 v$$

$$F = -\cos v \cdot u\sin v + \sin v \cdot u\cos v + a\sin v = a\sin v.$$

$$EG - F^2 = 2u^2 + a^2\sin^2 v \Rightarrow dS = \sqrt{2u^2 + a^2\sin^2 v}\,du\,dv \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{3}\iint_S \Big\{ u\cos v\left(-a\sin^2 v + u\cos v\right) + u\sin v\left(u\sin v + a\sin v\cos v\right) +$$

$$+ (-u + a\cos v)\,u \Big\} \frac{dS}{\sqrt{2u^2 + a^2\sin^2 v}} =$$

$$= \frac{1}{3}\iint_S \frac{a u\cos v}{\sqrt{2u^2 + a^2\sin^2 v}}\,dS = \frac{1}{3}\iint_\Omega a u\cos v\,du\,dv = \frac{1}{3}a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos v\,dv\int_0^{a\cos v} u\,du =$$

$$= \frac{a^3}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 v)\cos v\,dv = \left| w = \sin v \right| = \frac{a^3}{3}\int_0^1 (1-w^2)\,dw = \frac{2a^3}{9}. \Rightarrow$$

$$V = \frac{2a^3}{9}.$$

Дома: NN 4377, 4379, 4385.1, 4388, 4390

№ 4377 Преобразовать интеграл I, если гладкая поверхность S ограничивает объем V и $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S

$$I = \iint_S yz\,dydz + zx\,dzdx + xy\,dxdy = \iiint_V 0\,dxdydz \equiv 0.$$

№ 4379 Преобразовать интеграл I, если гладкая поверхность S ограничивает объем V и $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \right) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dxdydz.$$

№ 4388 Найти $I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

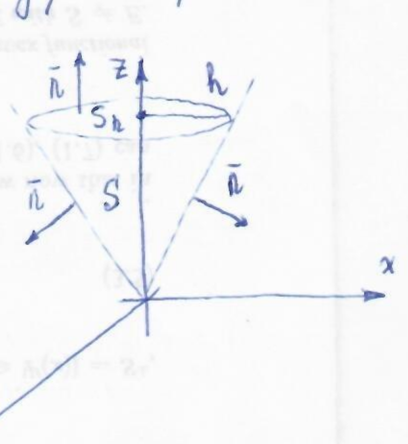
$$I = \iint_S \{ x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma \} dS = 3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi\cos\psi, & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi, & -\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2} \\ z = r\sin\psi, & 0 \le r \le a \end{array} \right| = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^a r^4\cos\psi\,dr =$$

$$= 6\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\,d\psi \int_0^a r^4\,dr = 12\pi\int_0^a r^4\,dr = \frac{12\pi a^5}{5} \Rightarrow I = \frac{12\pi a^5}{5}.$$

№ 4390 Найти $I = \iint (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$, где S – часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, $0 \le z \le h$ и $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности.

Присоединим часть плоскости $z = h$, $x^2+y^2 \le h^2$ и обозначим через S_h.



$$I = \iint_{S \cup S_h} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS -$$

$$- \iint_{S_h} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS = I_1 - I_2.$$

$$I_1 = \iint_{S \cup S_h} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS = 2\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi, & 0 \le r \le z \\ z = z, & 0 \le z \le h \end{array} \right| = 2\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z r(r\cos\varphi + r\sin\varphi + z)\,dr =$$

$$= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \left\{ 2\frac{\sqrt{2}}{3} z^3 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + z^3 \right\} d\varphi = 2\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^h z^3 dz \int_0^{2\pi} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi + \int_0^h z^3 dz \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

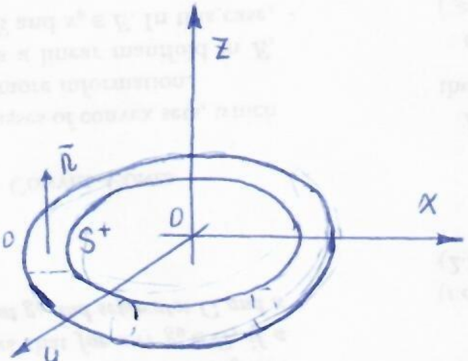
$$= \frac{\sqrt{2}}{6} h^4 \overset{0}{\cancel{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}}} + 2\frac{\pi h^4}{4} = \frac{\pi h^4}{2}.$$

$$I_2 = \iint_{S_h} z^2 \cos\gamma\, dS = \left| \begin{array}{l} \cos\gamma = 1 \\ z = h \end{array} \right| = h^2 \iint_{x^2+y^2 \le h^2} dx\,dy = \pi h^4. \Rightarrow$$

$$I = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2} \Rightarrow I = -\frac{\pi h^4}{2}.$$

№ 4385.1 Найти объем тела, ограниченного тором

$$\begin{cases} x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi \\ y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi, & 0 < a \le b \\ z = a\sin\psi \end{cases}$$



$$V = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \frac{2}{3}\iint_{\substack{S^+ \\ z \ge 0}} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS = (*)$$

$$A = \begin{vmatrix} (b + a\cos\psi)\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi \\ 0 & a\cos\psi \end{vmatrix} = a(b + a\cos\psi)\cos\varphi\cos\psi.$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & a\cos\psi \\ -(b + a\cos\psi)\sin\varphi & -a\sin\psi\cos\varphi \end{vmatrix} = a(b + a\cos\psi)\sin\varphi\cos\psi.$$

$$C = \begin{vmatrix} -(b + a\cos\psi)\sin\varphi & -a\sin\psi\cos\varphi \\ (b + a\cos\psi)\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi \end{vmatrix} = a(b + a\cos\psi)\sin^2\varphi\sin\psi +$$

$$+ a(b + a\cos\psi)\cos^2\varphi\sin\psi = a(b + a\cos\psi)\sin\psi.$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = a^2(b + a\cos\psi)^2\cos^2\varphi\cos^2\psi + a^2(b + a\cos\psi)^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + a^2(b + a\cos\psi)^2 \times$$

$$\times \sin^2\psi = a^2(b + a\cos\psi)^2 \Rightarrow \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = a(b + a\cos\psi).$$

$$\cos\alpha = \cos\varphi\cos\psi\,,\ \cos\beta = \sin\varphi\cos\psi\,,\ \cos\gamma = \sin\psi\,. \Rightarrow$$

$$(*) = \frac{2}{3}\iint\limits_{\substack{S^+\\ z\geq 0}} \left\{(b+a\cos\psi)\cos^2\varphi\cos\psi + (b+a\cos\psi)\sin^2\varphi\cos\psi + a\sin^2\psi\right\} dS =$$

$$= \frac{2}{3}\iint\limits_{\substack{S^+\\ z\geq 0}} \left\{(b+a\cos\psi)\cos\psi + a\sin^2\psi\right\} dS = \frac{2}{3}\iint\limits_{\substack{S^+\\ z\geq 0}} (a+b\cos\psi)\, dS = (*)$$

$$E = (b+a\cos\psi)^2\sin^2\varphi + (b+a\cos\psi)^2\cos^2\varphi + 0 = (b+a\cos\psi)^2.$$

$$G = a^2\sin^2\psi\cos^2\varphi + a^2\sin^2\psi\sin^2\varphi + a^2\cos^2\psi = a^2.$$

$$F = a(b+a\cos\psi)\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi - a(b+a\cos\psi)\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{EG-F^2} = a(b+a\cos\psi) \Rightarrow dS = a(b+a\cos\psi)\,d\varphi\, d\psi \Rightarrow$$

$$V = (*) = \frac{2a}{3}\iint\limits_{\Omega} (a+b\cos\psi)(b+a\cos\psi)\, d\varphi\, d\psi = \left| \begin{matrix} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \psi \leq \pi \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2a}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (a+b\cos\psi)(b+a\cos\psi)\, d\psi = \frac{4\pi a}{3}\int_0^{\pi} (ab + a^2\cancelto{0}{\cos\psi} + b^2\cancelto{0}{\cos\psi} +$$

$$+ ab\cos^2\psi)\, d\psi = \frac{4\pi^2 a^2 b}{3} + \frac{2\pi a^2 b}{3}\int_0^{\pi} 2\cos^2\psi\, d\psi =$$

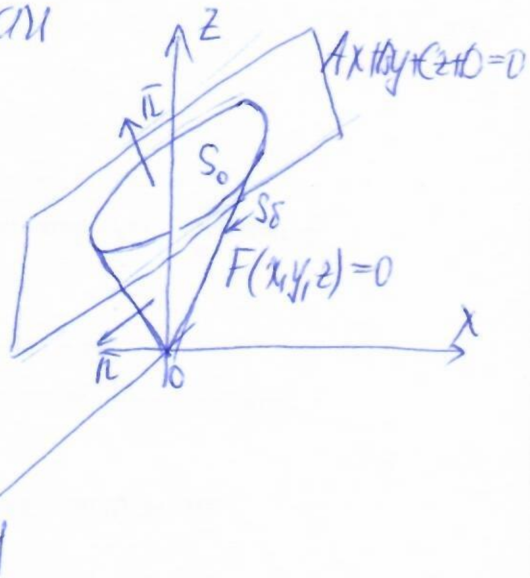
$$= \frac{4\pi^2 a^2 b}{3} + \frac{2\pi a^2 b}{3}\int_0^{\pi} (1+\cancelto{0}{\cos 2\psi})\, d\psi = \frac{4\pi^2 a^2 b}{3} + \frac{2\pi^2 a^2 b}{3} = 2\pi^2 a^2 b. \Rightarrow$$

$$V = 2\pi^2 a^2 b.$$

4383 Доказать, что объем конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью $F(x,y,z)=0$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$, равен $V=\frac{1}{3}SH$, где S — площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, и H — его высота.

Считаем, что $(0,0,0)$ — вершина конуса.

Вектор нормали к конической поверхности



$$\cos\alpha = \pm \frac{F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}$$

$$\cos\beta = \pm \frac{F'_y}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}$$

По определению конической поверхности: в любой точке (x,y,z), что $F(x,y,z)=0$ имеем

$$<(x,y,z)^T, \bar{n}> = 0,$$

или

$$xF'_x + yF'_y + zF'_z = 0.$$

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{S_K}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS = \frac{1}{3}\iint\limits_{S_0}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$$

$$+\frac{1}{3}\iint\limits_{S_б}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS.$$

$$\frac{1}{3}\iint\limits_{S_б}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,ds=\frac{1}{3}\iint\limits_{S_б}\left(x\frac{F'_x}{\sqrt{\ldots\ldots}}+y\frac{F'_y}{\sqrt{\ldots\ldots}}+\right.$$

$$\left.+z\cdot\frac{F'_z}{\sqrt{\ldots\ldots}}\right)ds=\frac{1}{3}\iint\limits_{S_б}\frac{xF'_x+yF'_y+zF'_z}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}\,ds=0.$$

$$\frac{1}{3}\iint\limits_{S_0}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,ds=\frac{1}{3\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\iint\limits_{S_0}(Ax+By+Cz)\,ds=$$

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

$$=\frac{-D}{3\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\iint\limits_{S_0}ds=\frac{1}{3}S\cdot H$$

$S=\iint\limits_{S_0}ds$ — площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости.

$H=\dfrac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ — расстояние от начала координат до плоскости, то есть высота конуса.